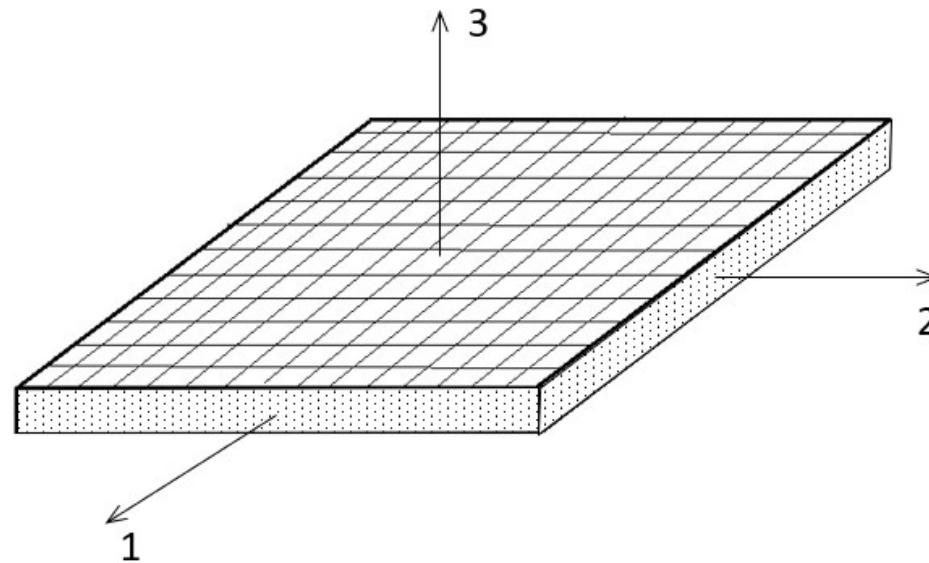


Mechanika warstwy ortotropowej

Warstwy ortotropowe są często analizowane w głównych osiach ortotropii 1, 2, 3. Oś 3 jest skierowana zawsze prostopadle do płaszczyzny warstwy lub powierzchni środkowej powłoki. W przypadku warstw ortotropowych zbrojonych włóknem ciągłym główne kierunki ortotropii pokrywają się z ukierunkowaniem włókien.



Główne kierunki ortotropii w warstwie kompozytu zbrojonego tkaniną

Zależność między odkształceniami i naprężeniami w takiej warstwie ma postać:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Dzięki temu, że grubość warstw kompozytów włóknistych jest zazwyczaj dużo mniejsza od ich pozostałych wymiarów, możemy przyjąć założenie, że pracują one w płaskim stanie naprężenia, czyli że:

$$\sigma_{33} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$$

Dzięki temu otrzymujemy następujące zależności na odkształcenia:

$$\varepsilon_{11} = \sigma_{11} \cdot S_{11} + \sigma_{22} \cdot S_{12}$$

$$\varepsilon_{22} = \sigma_{11} \cdot S_{21} + \sigma_{22} \cdot S_{22}$$

$$\varepsilon_{33} = \sigma_{11} \cdot S_{31} + \sigma_{22} \cdot S_{32}$$

$$\gamma_{23} = 0$$

$$\gamma_{31} = 0$$

$$\gamma_{12} = \tau_{12} \cdot S_{66}$$

Niezerowe są jedynie odkształcenia ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} i γ_{12} . Jednak odkształcenie ε_{33} zachodzi w kierunku prostopadłym do płaszczyzny działania naprężeń i jest ich pośrednim skutkiem działania współczynników Poissona. W związku z tym w analizie warstwy ortotropowej będą brane pod uwagę tylko odkształcenia ε_{11} , ε_{22} i γ_{12} .

Zależność między odkształceniami i naprężeniami przybiera zatem postać:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

W ten sposób otrzymujemy uproszczone zależności między odkształceniami i naprężeniami oraz zależność odwrotną dla warstwy ortotropowej:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

Macierz podatności

$$\begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$

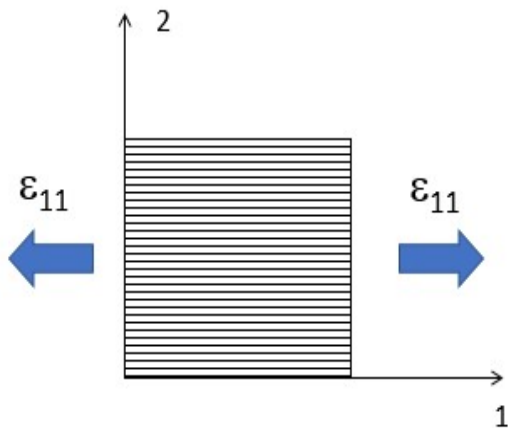
Macierz sztywności

Macierze w dwóch powyższych wzorach są symetryczne, zatem są one określone przez cztery stałe materiałowe E_{11} , E_{22} , ν_{12} i G_{12} . Te cztery stałe materiałowe są niezbędne do jednoznacznego opisu właściwości sztywnościowych warstwy ortotropowej.

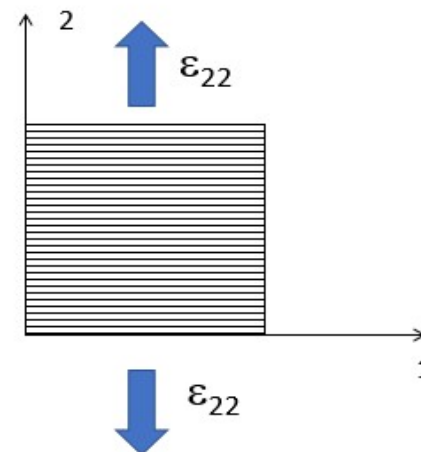
W literaturze technicznej przyjmuje się zazwyczaj, że $E_{11} > E_{22}$ i wówczas współczynnik ν_{12} nazywany jest większym współczynnikiem Poissona (major), a ν_{21} mniejszym współczynnikiem Poissona (minor).

$$\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{22}}$$

Dla warstwy o zbrojeniu jednokierunkowym ($E_{11} \gg E_{22}$):

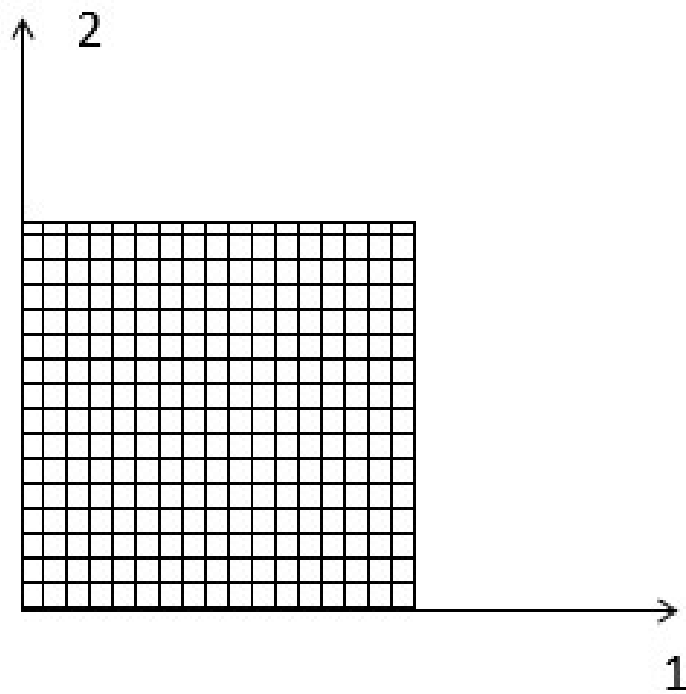


$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= 0,1\% \\ \epsilon_{22} &= -0,05\% \\ \nu_{12} &= -\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} = 0,5\end{aligned}$$



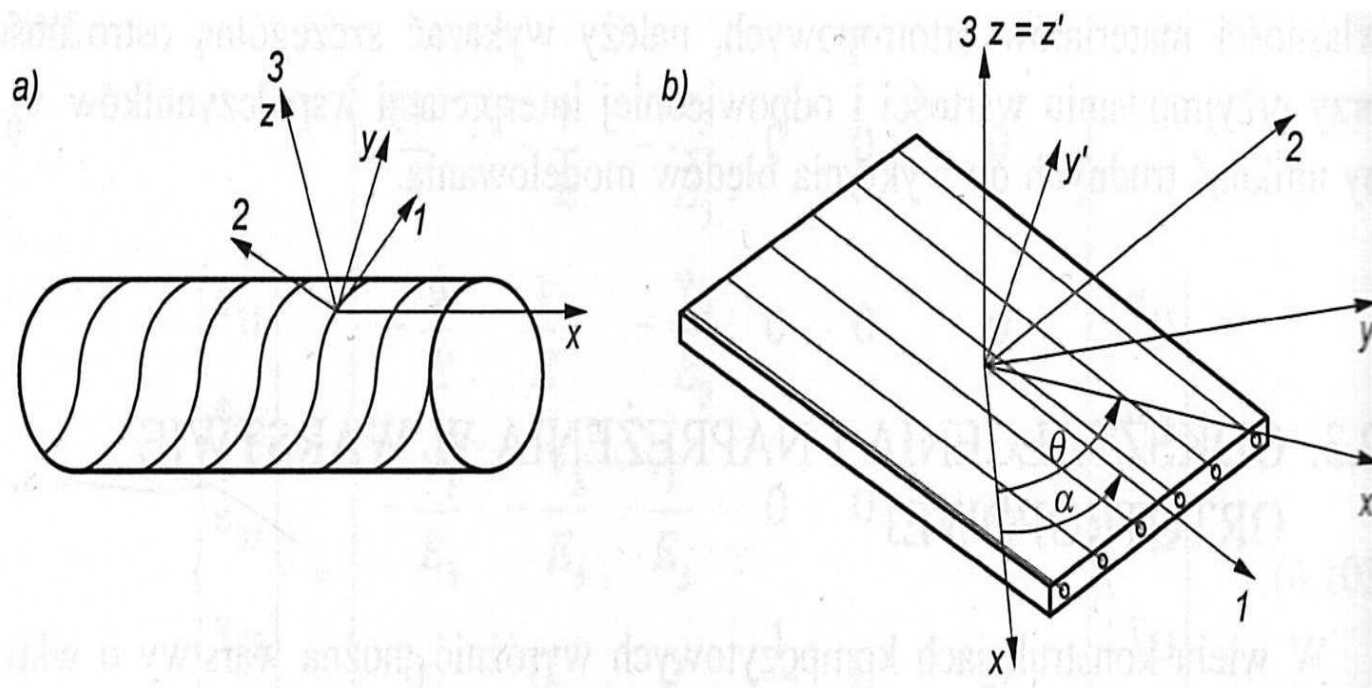
$$\begin{aligned}\epsilon_{22} &= 0,1\% \\ \epsilon_{11} &= -0,01\% \\ \nu_{21} &= -\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{22}} = 0,1\end{aligned}$$

Dla warstwy zbrojonej tkaniną dwukierunkową najczęściej $E_{11} \approx E_{22}$, wtedy:



$$\nu_{12} \approx \nu_{21}$$

Powyższe związki odpowiadają przypadkowi, w którym kierunki 1 i 2 są głównymi kierunkami ortotropii warstwy. Jednakże w wielu przypadkach kierunki osi ortotropii nie pokrywają się z osiami przyjętego układu współrzędnych x, y, z , który zwykle uzależniony jest od kształtu rozpatrywanego elementu lub od kierunków obciążeń. Oś z , podobnie jak oś 3, jest zawsze skierowana prostopadle do warstwy.



W związku z tym potrzebna jest zależność łącząca stany naprężenia w dwóch kartezjańskich układach współrzędnych obróconych względem siebie w płaszczyźnie warstwy o kąt α :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

Macierz transformacji $[T]$ ma postać:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

Podobna zależność wiąże składowe stanu odkształcenia w dwóch obróconych względem siebie układach współrzędnych:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

Kąt α mierzony jest w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara od osi x do osi 1 . Mamy jednocześnie:

$$[T]^{-1} = [T(-\alpha)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

Prawo Hooke'a dla naprężeń i odkształceń przedstawionych w układzie 1,2,3 zapisujemy w postaci:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

Dokonując kolejnych podstawień w celu znalezienia zależności między odkształceniami i naprężeniami w układzie xy otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix} = [R][T]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix} = [R][T]^{-1}[R]^{-1}[S] \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \text{ gdzie } [R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Zatem:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [R][T]^{-1}[R]^{-1}[S][T] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Związek ten można przedstawić w postaci:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [T]^T [S] [T] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Przyjmując oznaczenia:

$$[T]^T [S] [T] = [S^*] = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & S_{16}^* \\ S_{21}^* & S_{22}^* & S_{26}^* \\ S_{61}^* & S_{62}^* & S_{66}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & S_{16}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* & S_{26}^* \\ S_{16}^* & S_{26}^* & S_{66}^* \end{bmatrix}$$

Przyjmując $\sin\alpha = s$ i $\cos\alpha = c$ otrzymujemy następujące zależności na elementy macierzy $[S^*]$:

$$S_{11}^* = S_{11}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}s^4$$

$$S_{12}^* = S_{12}c^4 + (S_{11} + S_{22} - S_{66})s^2c^2 + S_{12}s^4$$

$$S_{22}^* = S_{22}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{11}s^4$$

$$S_{66}^* = S_{66}c^4 + 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})s^2c^2 + S_{66}s^4$$

$$S_{16}^* = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})sc^3 - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})s^3c$$

$$S_{26}^* = (2S_{12} + S_{66} - 2S_{22})sc^3 - (2S_{12} + S_{66} - 2S_{11})s^3c$$

Współczynniki S_{ij} mają wartości:

$$S_{11} = \frac{1}{E_{11}}, \quad S_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_{22}}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_{22}}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

Poszukiwany ogólny związek odkształcenia-naprężenia w przypadku warstwy ortotropowej w dowolnym układzie współrzędnych określonym przez kąt α ma zatem postać:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & S_{16}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* & S_{26}^* \\ S_{16}^* & S_{26}^* & S_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Podobnie chcemy znaleźć zależność między naprężeniami i odkształceniami:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1}[Q][R][T][R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Związek ten można przedstawić w postaci:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q] ([T]^{-1})^T \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Przyjmując oznaczenie:

$$[Q^*] = [T]^{-1} [Q] ([T]^{-1})^T$$

Otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* & Q_{16}^* \\ Q_{12}^* & Q_{22}^* & Q_{26}^* \\ Q_{16}^* & Q_{26}^* & Q_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Przyjmując $\sin\alpha = s$ i $\cos\alpha = c$ otrzymujemy następujące zależności na elementy macierzy $[Q^*]$:

$$Q_{11}^* = Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}s^4$$

$$Q_{12}^* = Q_{12}c^4 + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}s^4$$

$$Q_{22}^* = Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{11}s^4$$

$$Q_{66}^* = Q_{66}c^4 + (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}s^4$$

$$Q_{16}^* = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})s^3c$$

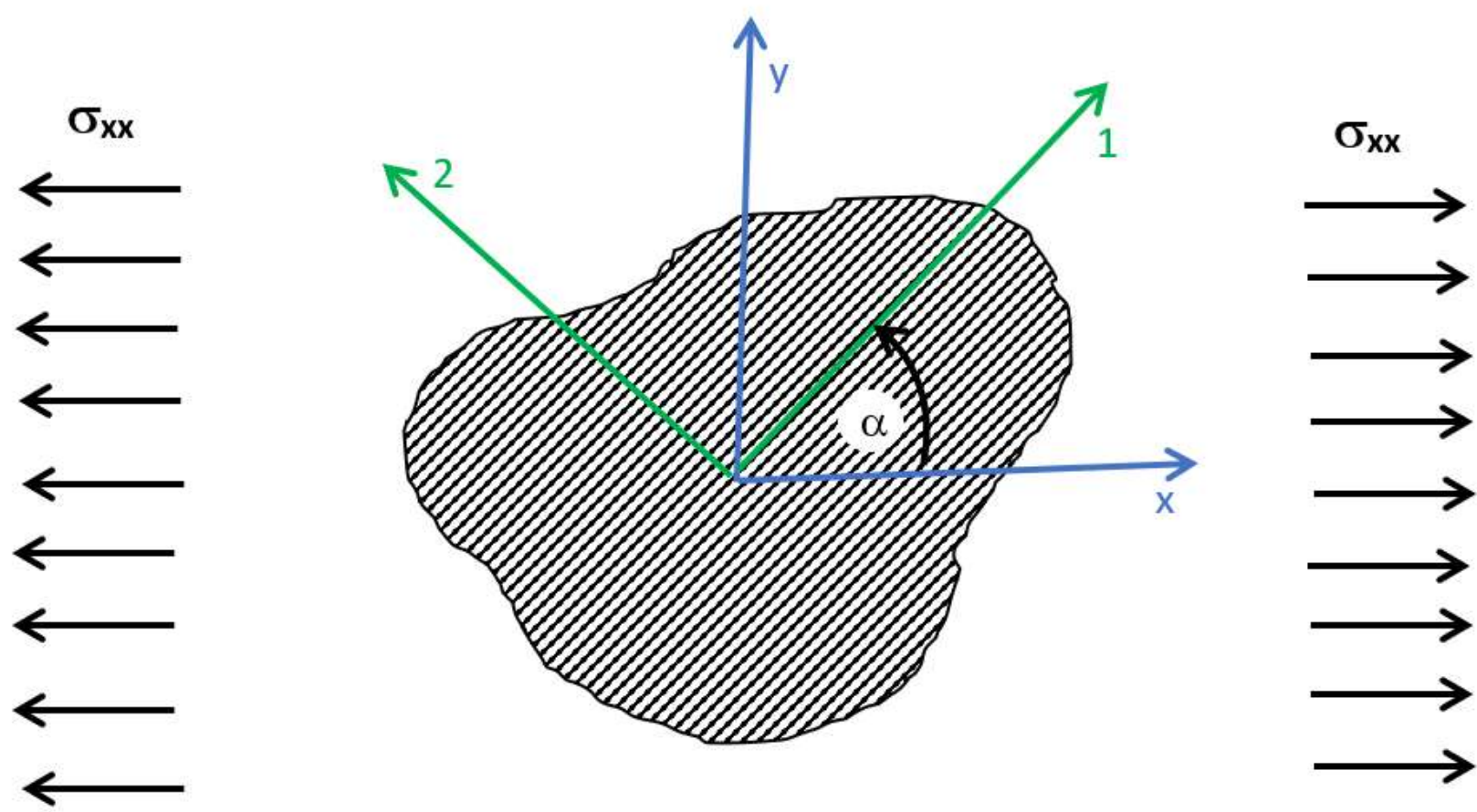
$$Q_{26}^* = (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sc^3 + (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c$$

Współczynniki Q_{ij} mają wartości:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}$$

ZADANIE

Warstwa ortotropowa ma właściwości: $E_{11} = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$, $E_{22} = 0,5 \times 10^5 \text{ MPa}$, $\nu_{12} = 0,25$, $G_{12} = 2 \times 10^4 \text{ MPa}$. Znaleźć składowe stanu odkształcenia w układzie xy w wyniku rozciągania naprężeniem $\sigma_{xx} = 10 \text{ MPa}$ dla kątów α równych a) 45° i b) 90° .



Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & S_{16}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* & S_{26}^* \\ S_{16}^* & S_{26}^* & S_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stąd:

$$\varepsilon_{xx} = S_{11}^* \sigma_{xx}$$

$$\varepsilon_{yy} = S_{12}^* \sigma_{xx}$$

$$\gamma_{xy} = S_{16}^* \sigma_{xx}$$

gdzie:

$$S_{11}^* = S_{11}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}s^4$$

$$S_{12}^* = S_{12}c^4 + (S_{11} + S_{22} - S_{66})s^2c^2 + S_{12}s^4$$

$$S_{16}^* = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})sc^3 - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})s^3c$$

Współczynniki S_{ij} mają wartości:

$$S_{11} = \frac{1}{E_{11}}, \quad S_{12} = \frac{-\nu_{12}}{E_{11}}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_{22}}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

Dane: $E_{11} = 2 \times 10^5$ MPa, $E_{22} = 0,5 \times 10^5$ MPa, $\nu_{12} = 0,25$, $G_{12} = 2 \times 10^4$ MPa; $\sigma_{xx} = 10$ MPa

a) Dla $\alpha = 45^\circ$:

$$S_{11}^* = \frac{1,812}{10^5} \left[\frac{1}{MPa} \right]$$
$$S_{12}^* = -\frac{0,688}{10^5} \left[\frac{1}{MPa} \right]$$
$$S_{16}^* = -\frac{1,75}{10^5} \left[\frac{1}{MPa} \right]$$



$$\varepsilon_{xx} = S_{11}^* \sigma_{xx} = \underline{1,812 \times 10^{-4}}$$
$$\varepsilon_{yy} = S_{12}^* \sigma_{xx} = \underline{-0,688 \times 10^{-4}}$$
$$\gamma_{xy} = S_{16}^* \sigma_{xx} = \underline{-0,75 \times 10^{-4}}$$

a) Dla $\alpha = 90^\circ$:

$$S_{11}^* = \frac{2}{10^5} \left[\frac{1}{MPa} \right]$$

$$S_{12}^* = -\frac{0,125}{10^5} \left[\frac{1}{MPa} \right]$$

$$S_{16}^* = 0 \left[\frac{1}{MPa} \right]$$

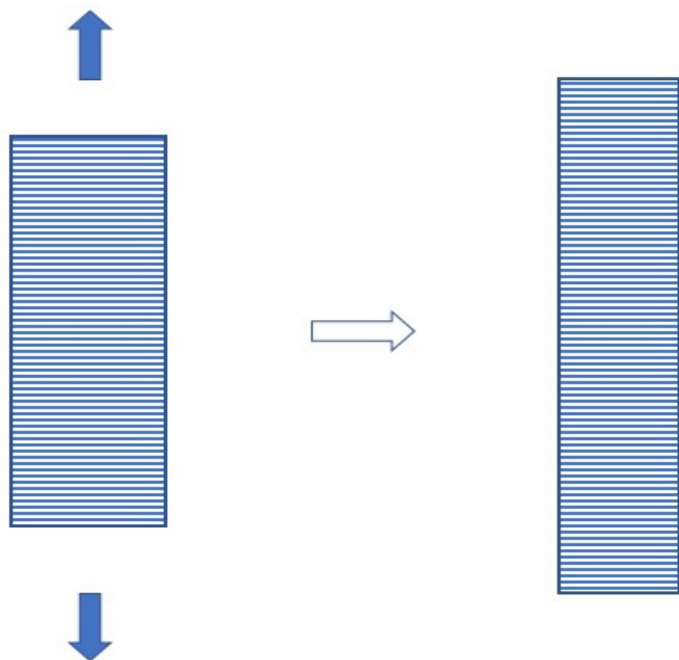


$$\varepsilon_{xx} = S_{11}^* \sigma_{xx} = \underline{2 \times 10^{-4}}$$

$$\varepsilon_{yy} = S_{12}^* \sigma_{xx} = \underline{-0,125 \times 10^{-4}}$$

$$\gamma_{xy} = S_{16}^* \sigma_{xx} = \underline{0}$$

Warto zwrócić uwagę, że jeśli α jest wielokrotnością wartości $\Pi/2$, to współczynniki macierzy Q_{16}^* , Q_{26}^* , S_{16}^* i S_{26}^* są zerowe i nie istnieje sprzężenie między rozciąganiem i ściskaniem a ścinaniem. Próbka rozciągana tylko wzdłuż kierunków ortotropii będzie zachowywała się podobnie, jak próbka wykonana z materiału izotropowego. Rozciąganie prowadzi wtedy jedynie do wydłużenia w kierunku rozciągania i skrócenia w kierunku poprzecznym, bez odkształceń kątowych.



$$S_{11}^* = S_{11}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}s^4$$

$$S_{12}^* = S_{12}c^4 + (S_{11} + S_{22} - S_{66})s^2c^2 + S_{12}s^4$$

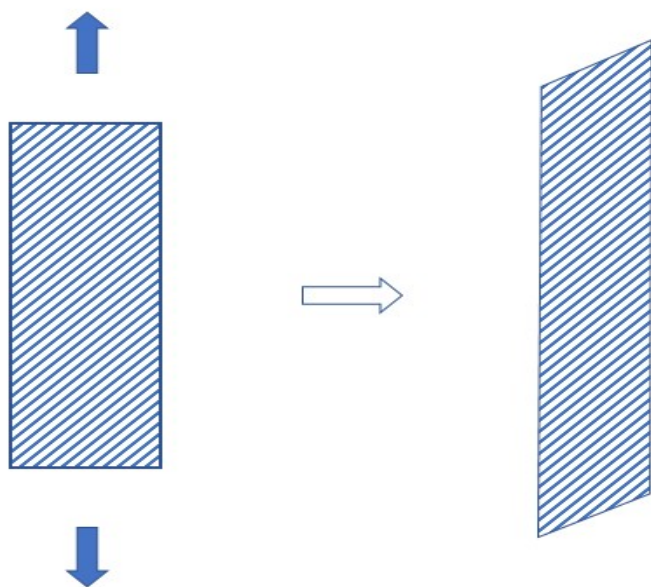
$$S_{22}^* = S_{22}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{11}s^4$$

$$S_{66}^* = S_{66}c^4 + 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})s^2c^2 + S_{66}s^4$$

$$S_{16}^* = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})sc^3 - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})s^3c$$

$$S_{26}^* = (2S_{12} + S_{66} - 2S_{22})sc^3 - (2S_{12} + S_{66} - 2S_{11})s^3c$$

Natomiast jeśli α nie jest wielokrotnością wartości $\Pi/2$, to wszystkie współczynniki macierzy $[Q^*]$ i $[S^*]$ są niezerowe i istnieje pełne sprzężenie między składowymi stanu naprężenia i stanu odkształcenia, czyli rozciąganie bądź ściskanie powoduje też odkształcenia postaciowe i na odwrót. Wynika stąd, że w ogólnym przypadku, kiedy osie x i y nie pokrywają się z głównymi kierunkami ortotropii, kierunki główne naprężeń nie pokrywają się z głównymi kierunkami odkształceń.



$$S_{11}^* = S_{11}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}s^4$$

$$S_{12}^* = S_{12}c^4 + (S_{11} + S_{22} - S_{66})s^2c^2 + S_{12}s^4$$

$$S_{22}^* = S_{22}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{11}s^4$$

$$S_{66}^* = S_{66}c^4 + 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})s^2c^2 + S_{66}s^4$$

$$S_{16}^* = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})sc^3 - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})s^3c$$

$$S_{26}^* = (2S_{12} + S_{66} - 2S_{22})sc^3 - (2S_{12} + S_{66} - 2S_{11})s^3c$$

Znacząco komplikuje to przewidywanie deformacji materiału ortotropowego.